

## Chapitre III. Gaz parfaits

### II.A : Définitions – propriétés.

#### III.A.I : Généralités :

Un gaz parfait est un fluide idéal qui satisfait à l'équation d'état  $p.v=n.RT$ , ou encore c'est un gaz qui obéit rigoureusement aux trois lois. MARIOTTE, GAY.LUSSAC et CHARLES.

Dans ce chapitre, on désigne par 'v' le volume d'une unité de masse (U.D.M) de gaz parfait et par 'V<sub>m</sub>' le volume molaire d'un gaz parfait avec :

$$1 \text{ mole} = 6,023.10^{23} \text{ Molécules} = A \text{ (nombre d'Avogadro).}$$

On considère une masse gazeuse occupant le volume V sous la pression P et la température T.

#### 1. Loi de MARIOTTE.

Enoncé de la loi :

A température constante, le produit de la pression d'une masse gazeuse par son volume est constant (cette loi est d'origine expérimentale )

Sous faibles pressions, tous les gaz se comportent de la même manière quelque soit leur nature.

Par définition, un gaz parfait (G.P) sera un gaz pour lequel

$$P.V = \text{Cte} \quad \text{loi de MARIOTTE.}$$

Pour un gaz parfait, le produit P.V ne dépend que de la température  $P.V = f(T)$ .

La relation précédente à température constante peut s'écrire  $P = \frac{\text{Cte}}{V}$ , ce qui conduit à un second énoncé de la loi de MARIOTTE.

A température constante, la pression d'une masse gazeuse est inversement proportionnelle au volume qu'elle occupe.

Si on considère deux états différents d'une même masse gazeuse à la même température avec :

$P_1$  et  $V_1$  pression et volume à l'état (1).

$P_2$  et  $V_2$  pression et volume à l'état (2), la loi de MARIOTTE sera alors :

$$P_1 V_1 = P_2 V_2$$

## 2. Loi de GAY-LUSSAC.

Enoncé de la loi :

A pression constante, l'augmentation de volume d'un gaz parfait (dilatation ou détente) est proportionnelle à la température absolue.

$$\boxed{\frac{V}{T} = Cte} \text{ Ou } V = Cte.T \text{ loi de GAY-LUSSAC.}$$

Si on considère deux états différents d'une même masse gazeuse à la même pression avec :

$T_1$  et  $V_1$  température et volume à l'état (1).

$T_2$  et  $V_2$  température et volume à l'état (2). On a la relation :

$$\boxed{\frac{V_1}{t_1 + 273} = \frac{V_2}{t_2 + 273} \text{ ou } \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}}$$

### Seconde forme de la relation.

Soit une masse gazeuse chauffée à pression constante,

$V_0$  est le volume à  $0^\circ\text{C} = 273^\circ\text{K}$

$V$  est le volume à  $t^\circ\text{C} = (273+t)^\circ\text{K}$

D'après GAY-LUSSAC on a :  $\frac{V}{t+273} = \frac{V_0}{273}$  ou  $V = V_0 \frac{t+273}{273} = V_0 \left(1 + \frac{t}{273}\right)$  d'où

$$\boxed{V = V_0(1 + \alpha.t)} \text{ avec } \alpha = 1/273 \text{ coefficient de dilatation du gaz.}$$

## 3. Loi de CHARLES (ou 2<sup>ème</sup> loi de GAY-LUSSAC).

Enoncé de la loi :

A volume constant, l'augmentation de pression d'un gaz parfait est proportionnelle à l'élévation de la température. On a :

$$\boxed{\frac{P}{T} = Cte} \text{ Loi de CHARLES.}$$

Si on considère deux états différents d'une même masse gazeuse dans lesquelles elle occupe le même volume. la pression et la température sont :

$P_1$  et  $T_1$  pression et température à l'état (1).

$P_2$  et  $T_2$  pression et température à l'état (2). On a la relation :

$$\frac{P_1}{t_1 + 273} = \frac{P_2}{t_2 + 273}$$

Seconde forme de la relation

Soit  $P_0$  et  $P$  les pressions à  $0^\circ\text{C}$  et  $t^\circ\text{C}$  d'une même masse gazeuse dont le volume est invariant (constant) on a :

$$\frac{P}{t + 273} = \frac{P_0}{273} \Rightarrow P = P_0 \left( 1 + \frac{t}{273} \right)$$

Où  $P = P_0(1 + \beta t)$  avec :  $\beta = 1/273$  Coefficient d'augmentation de pression.

#### 4. Température centésimale – température absolue.

a- Echelle centésimale :

L'échelle centésimale linéaire est définie par la relation thermométrique  $t = ax + b$  où  $a$  et  $b$  sont deux points fixes choisis arbitrairement, on affecte :

\* La température  $0^\circ\text{C}$ , lorsque le thermomètre est dans la glace fondante saturée d'eau sous la pression atmosphérique ambiante.

\* La température  $100^\circ\text{C}$ , lorsque le thermomètre est dans la vapeur d'eau bouillante sous pression atmosphérique normale.

Si l'on désigne par  $x$ ,  $x_0$ ,  $x_{100}$  les valeurs de la variable thermométrique, respectivement aux températures,  $t^\circ\text{C}$ ,  $0^\circ\text{C}$  et  $100^\circ\text{C}$ , la relation précédente s'écrit :

$$\left. \begin{array}{l} 0 = ax_0 + b \\ 100 = ax_{100} + b \end{array} \right\} \Rightarrow a = \frac{100}{x_{100} - x_0} \quad \text{et} \quad b = \frac{100x_0}{x_{100} - x_0} \quad \text{Soit} \quad t = \frac{x - x_0}{x_{100} - x_0} \cdot 100$$

La variable thermométrique  $x$ , peut être le volume, la pression d'un fluide etc.

b- Echelle absolue :

Si on reprend la loi de CHARLES, physiquement une pression ne peut être que positive.

$$\text{Si } P = 0 \Rightarrow P_0(1 + \beta t) = 0 \Rightarrow 1 + \beta t = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{\beta}$$

La température la plus basse qui existe vaut  $t = -\frac{1}{\beta} = -273^{\circ}\text{C}$

On peut définir la nouvelle échelle de température, le degré Kelvin qui se divise des degrés Celsius par une translation. Cette nouvelle température exprimée en Kelvin s'appelle température absolue ou température thermodynamique.

### Notation habituelle.

$t$  : Température centésimale exprimée en degré Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ).

$T$  : Température thermodynamique ou absolue exprimée en degré Kelvin ( $^{\circ}\text{K}$ ).

$$\text{Avec : } T = t + 273 \quad T > 0 \quad \Delta T = \Delta t$$

### III.A.2 : Caractéristiques d'un gaz parfait :

#### 1 : Equation d'état.

On recherche l'équation qui lie les paramètres d'état ( $p, v, T$ ). On considère une (U.D.M) d'un gaz parfait dans deux états différents :

Etat (1) : ( $P, V, T$ )

Etat (2) : ( $P', V', T'$ )

Imaginons un 3<sup>ème</sup> état où la pression est  $P$ , la température est  $T'$ . Etat (3) : ( $P, V'', T'$ ).

On passe à pression constante de l'état (1) à l'état (3), on a donc en vertu de la loi de GAY-LUSSAC.

$$\frac{V}{T} = \frac{V''}{T'} \quad \dots(1)$$

On passe de l'état (3) à l'état (2), la température étant constante, on a donc en vertu de la loi de MARIOTTE:

$$P'' \cdot V'' = P' \cdot V' \quad \dots(2)$$

En multipliant membre à membre les deux équations (1) et (2) on obtient :

$$\frac{P \cdot V \cdot V''}{T} = \frac{P' \cdot V' \cdot V''}{T'} \Rightarrow \frac{P \cdot V}{T} = \frac{P' \cdot V'}{T'} = \text{cte. Pour un gaz parfait on a : } \boxed{\frac{P \cdot V}{T} = \text{Cte}}$$

Pour l'unité de masse (UDM) cette constante est appelée ( $r$ ), l'équation d'état devient :  $\boxed{P \cdot v = rT}$

Ici,  $v$  : est le volume massique tel que  $v = \frac{1}{\rho}$ .  $r$  : dépend du gaz considéré.

Pour une masse  $m$  de gaz parfait, occupant le volume  $V$  sous la pression  $P$  et à température  $T$ , l'équation d'état devient :

$$PV = mrT$$

Pour l'air, qui est considéré comme un gaz parfait,  $r$  vaut :  $287 \text{ J/kg}^\circ\text{K}$ .

Si on considère une masse molaire  $M$  de gaz parfait, elle occupe le volume  $V$ , on peut écrire :

$P.V = MrT = RT$  avec :  $R=M.r$  tel que  $R$  : constante universelle des gaz parfait indépendante du gaz considéré. Donc pour 1 Mole de gaz parfait, l'équation d'état devient :

$$P.v = RT$$

Ici,  $v$  : représente le volume molaire =  $22,4 \text{ L}$

Pour  $n$  moles de gaz parfait occupant un volume  $V$ , sous la pression  $P$  et la température  $T$ , l'équation d'état devient :  $P.V = nRT$

$R=8.32\text{J/Mole}^\circ\text{K}$  pour tous les gaz.

## 2 : Loi de JOULE – GAY-LUSSAC sur l'énergie interne :

### Enoncé de la loi.

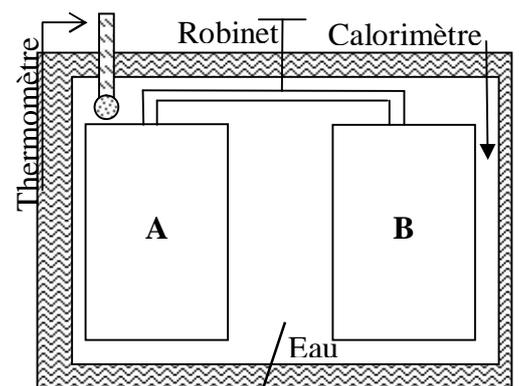
Pour un gaz parfait, l'énergie interne  $U$  n'est fonction que de la température  $T$ .

### Expérience justificative. (Détente de joule)

A et B réservoir de même volume relié par un robinet R. L'ensemble est immergé dans l'eau contenue dans un calorimètre.

A l'instant initial, le réservoir est rempli d'un gaz parfait et en équilibre thermique.

A la même température  $T$ , on ouvre le robinet R, le gaz se détend dans le réservoir B. le volume et la pression du gaz varient. Lorsque le système est revenu à l'état d'équilibre, on constate que la température de l'eau n'a pas variée.



Analyse d'expérience :

On considère le système A+B+Gaz, le 1<sup>er</sup> principe de la thermodynamique permet d'écrire :

$$W + Q = \Delta U + \underbrace{\Delta E_p}_{\approx 0} + \underbrace{\Delta E_c}_{\approx 0}$$

$W$  : seules les forces de pression sont susceptibles de travailler.

$$W_p = -\int p.dv \quad V = \text{cte} \Rightarrow dv = 0 \quad \Rightarrow W = 0$$

$Q$  : on considère le système  $S$  (eau).  $W' + Q' = \Delta U' \quad \Delta U' = m.c.\Delta T$

Or  $\Delta T$  de l'eau n'a pas variée (expérience).  $\Rightarrow Q' = \Delta U' \Rightarrow$  Chaleur échangée avec A+B+Gaz  $\cong S$ , cette chaleur ne peut provenir que par  $S$  car l'extérieur est calorifugé  $\Rightarrow Q' = -Q = 0$

Finalement pour  $S$ , on a :  $\Delta U = 0$

$$\text{Or : } \Delta U = \underbrace{\Delta U_A + \Delta U_B}_{\text{Variation de l'énergie interne des réservoirs}} + \underbrace{\Delta U_{\text{Gaz}}}_{\text{Variation de l'énergie interne du gaz}}$$

$\Delta U_A = \Delta U_B = 0$  car les réservoirs à l'état final sont à la même température qu'à l'état initial. Finalement on déduit :  $\Delta U_{\text{Gaz}} = 0$ .

Pour le gaz parfait, la pression et le volume ont changé par contre, la température est restée constante, aussi que l'énergie interne  $\Rightarrow$  l'énergie interne du gaz parfait ne dépend que de la température.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T = 0 \quad \text{pour un gaz parfait.}$$

3 : Energie interne d'un gaz parfait :

On considère une transformation élémentaire de l'état (1) : (P, V, T) à l'état (1+d1) : (P+dp, V+dv, T+dT). On appelle dU la variation de l'énergie interne au cours de cette transformation.

On considère maintenant l'état (1+d1') : (P+dp, V, T+dT) transformation isochore pour laquelle on a une variation d'énergie interne dU'.

$$\text{Etat (1) : (P, V, T) } \xrightarrow{dU} \text{Etat 1+d1 : (P+dp, V+dv, T+dt).}$$

$$\text{Etat (1) : (P, V, T) } \xrightarrow{dU'} \text{Etat 1+d1' : (P+dp, V, T+dt).}$$

$dU = dU'$  car les températures initiale et finale sont les mêmes (Vu que  $U$  ne dépend que de la température (expérience de joule)).  $dU' = \delta W' + \delta Q'$  (1<sup>er</sup> principe de la transformation système fermé).

Or :  $\delta W' = -Pdv = 0$  car  $v = \text{cte}$ .

$$\delta Q' = C_v.dT + \underbrace{Ldv}_{\approx 0} \Rightarrow \delta Q' = C_v.dT.$$

$$\text{Finalement : } \boxed{dU = C_v.dT}$$

avec  $C_v$  : chaleur massique à volume constant, en Joule/kg<sup>o</sup>k.

Pour une transformation de 1 à 2, on a :

$$\boxed{\Delta U = \int_1^2 C_v.dT}$$

**Remarque :**

Quand on se place dans une intervalle de température assez restreinte (de 100<sup>o</sup>c à 200<sup>o</sup>c par exemple), on peut considérer avec une bonne approximation que  $C_v$  est constante (Vérifiée expérimentalement) on à donc :

$$\boxed{\Delta U = C_v.\Delta T}$$

Lorsqu'on ne peut plus considérer  $C_v$  comme constante, on prend une moyenne  $C_v$  entre  $t_1$  et  $t_2$ .

$$\overline{C_v} = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_1^2 C_v(t)dt \quad \text{donc} \quad \Delta U = \overline{C_v}.\Delta T$$

**4 : Enthalpie du gaz parfait :**

L'enthalpie est donnée par :  $H = U + P.V$

$U$  : n'est fonction que de  $T$

$P.V$  : n'est fonction que de  $T$  (loi de MARIOTTE)

$\Rightarrow$  L'enthalpie  $H$  d'un gaz parfait ne dépend que de  $T$ .  $\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = 0$  pour un gaz parfait.

On considère une transformation élémentaire de  $(1) \rightarrow (1+d1)$ .

$$H = U + P.V \Rightarrow dH = dU + d(P.V) = dU + V.dP + P.dv$$

$$\text{Or : } dU = \delta W + \delta Q = -P.dV + \delta Q. \Rightarrow dH = -P.dV + \delta Q + V.dP + P.dV \quad \text{Avec :}$$

$$\begin{cases} dH = \delta Q + V.dP \\ \delta Q = C_p.dT + h.dP \end{cases} \quad h : \text{Coefficient calorimétrique}$$

Pour un même raisonnement à celui de §3, mais pour une transformation isobare ( $1 \rightarrow 1+d1'$ ), on trouve finalement :

$$\boxed{dH = C_p.dT \rightarrow \Delta H = \int_1^2 C_p.dT} \quad \text{avec ici, } C_p \text{ chaleur spécifique à une pression constante.}$$

**Nb : même remarque que pour l'énergie interne.**

Si  $C_p \approx \text{cte}$  (faibles variations de température), on obtient  $\boxed{\Delta H = C_p.T\Delta}$

$$\text{Si } C_p \neq \text{cte} \Rightarrow \overline{C_p} = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} C_p(t).dt \quad \boxed{\Delta H = \overline{C_p}.\Delta T}$$

### Conséquence 1 :

On considère l'U.D.M d'un gaz parfait ( $C_p$  et  $C_v$  chaleurs spécifiques à pression et à volume constants exprimées en  $J/kg^\circ k$ ).

$$\begin{aligned} dH &= C_p.dT \\ dH &= d(U+P.V) = dU+dP.V = dU + d(rt) \quad \text{Or } dU = C_v.dT. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dH = C_v.dT + r.dT = (C_v+r).dT \\ dH = C_p.dT \Rightarrow C_p = C_v + r \end{cases}$$

ou :  $\boxed{C_p - C_v = r}$  Formule de MAYER.

On introduisant le rapport  $\gamma = \frac{C_p}{C_v} \Rightarrow \gamma C_v - C_v = C_v(\gamma - 1) = r \Rightarrow C_v = \frac{r}{\gamma - 1}$

$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \Rightarrow C_p = \gamma C_v \Rightarrow C_p = \frac{r\gamma}{\gamma - 1}$  Ici,  $r$ ,  $C_v$  et  $C_p$  sont exprimés en  $J/kg^\circ k$ .

Lorsqu'on travaille sur une mole de gaz parfait on a :

$$\boxed{\begin{aligned} C_p - C_v &= R \\ C_v &= \frac{R}{\gamma - 1} \\ C_p &= \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \end{aligned}}$$

$C_p$ ,  $C_v$  et  $R$  exprimées en  $J/Mole^\circ k$ . adiabatique.

$\gamma$  : Coefficient de poisson ou adiabatique.

**Conséquence 2 :**

**1<sup>er</sup> principe système fermé.**  $dU = \delta Q + \delta W_p$

$$\left. \begin{array}{l} \delta Q = C_v.dT + L.dv \\ \delta W = -P.dv \\ dU = C_v.dT \end{array} \right\} \Rightarrow C_v.dT = C_v.dT + L.dv - P.dv = 0$$

$L.dv - P.dv = (L - P).dv = 0 \Rightarrow L = P$  pour un gaz parfait.

**1<sup>er</sup> principe système ouvert.** Avec  $m = 1$

$\delta W_T + \delta Q = dH + dE_c + dE_p \Rightarrow dH = \delta W_T + \delta Q$  (avec  $dE_c$  et  $dE_p \approx 0$ ).

$$\left. \begin{array}{l} \delta Q = C_p.dT + h.dp \\ \delta W_T = V.dp \text{ (travail technique)} \\ dH = C_p.dT \end{array} \right\} \Rightarrow C_p.dT = V.dp + C_p.dT + h.dp \Rightarrow h.dp + V.dp = (h + V)dp = 0$$

$\Rightarrow$   $h = -V$  pour un gaz parfait.

- $\delta Q = C_v.dT + l.dv = C_v.dT + P.dv$
  - $\delta Q = C_p.dT + h.dp = C_p.dT - V.dp$
- } pour un gaz parfait.

Or  $P.V = r.T$  (Equation d'état d'un gaz parfait pour  $m = 1$ ). On dérivant, on obtient :

$P.dv + V.dp = r.dT \Rightarrow dT = P.\frac{dv}{r} + V.\frac{dp}{r}$

$$\delta Q = \frac{C_p}{r}.P.dv + \frac{C_p}{r}.V.dp - V.dp = \frac{C_p}{r}.P.dv + V.dp \left( \frac{C_p}{r} - 1 \right)$$

$\delta Q = \frac{1}{r}(C_p.Pdv + C_v.Vdp)$  Finalement on a les expressions des  $\delta Q$  en fonction des trois (03) variables  $dp, dv, dT$ .

Pour un gaz parfait :

$$\begin{array}{l} \delta Q = C_v.dT + P.dv \\ \delta Q = C_p.dT - V.dp \\ \delta Q = \frac{1}{r}(C_p.p.dv + C_v.Vdp) \end{array}$$

### III.A.3 : Mélange des gaz parfaits :

On considère un mélange de gaz chimiquement inerte (mélange qui ne donne pas lieu à une réaction chimique).

#### 1 : Loi de DALTON –GIBBS.

Soit  $V$ , le volume occupé par le mélange. Chaque gaz occupe le volume  $V$  comme s'il été seul sous une pression  $P_i$  appelée pression partielle.

La pression du mélange est égale à la somme des pressions partielles des gaz composants.

$$P = \sum_1^n P_i$$

**Exemple :** mélange de 02 gaz (1) et (2)

$$P_1V = n_1RT \quad (n_1 \text{ moles gaz (1)})$$

$$P_2V = n_2RT \quad (n_2 \text{ moles gaz (2)})$$

$$(P_1+P_2).V = (n_1+n_2).RT \text{ ou } P.V = n.R.T \quad \text{tel que } n : \text{ nombre de moles du mélange.}$$

$$P : \text{ pression du mélange.}$$

De plus, les gaz étant chimiquement inertes, l'énergie interne du mélange est égale à la somme des énergies des 2 gaz et ne dépend donc, que de la température de  $n$  gaz.

**Enfin on a donc : Un mélange de gaz parfaits chimiquement inertes est un gaz parfait.**

#### 2 : Paramètres d'état d'un mélange de gaz parfaits :

On considère un mélange de  $n$  gaz parfaits (1, 2, ...,  $i$ , ...,  $n$ ). Pour définir la composition de ce mélange, on a besoin de paramètres d'état dont les plus fréquemment utilisés sont :

##### \* La fraction molaire

La fraction molaire  $x_i$  du gaz  $i$  dans le mélange est le rapport entre  $n_i$  nombre de moles de gaz  $i$  et  $n$ , nombre de moles du mélange

$$x_i = \frac{n_i}{n} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^n n_i = n, \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1.$$

\* **La fraction volumique**

La fraction volumique  $v_i$  du gaz  $i$  dans le mélange est le rapport entre  $V_i$  volume qu'occuperait le gaz  $i$  sous la pression  $P$  et la température  $T$  du mélange

et  $V$  : volume total du mélange. 
$$v_i = \frac{V_i}{V}$$

D'après la loi d'AMAGA:

$$P \cdot V_i = n_i \cdot RT$$

$$P \cdot V = nRT. \quad \text{On en déduit } \frac{V_i}{V} = \frac{n_i}{n} \Rightarrow v_i = x_i \text{ pour un gaz parfait.}$$

**Remarque :**

On a aussi 
$$\sum_{i=1}^n v_i = 1$$

$P_i$  étant la pression partielle du gaz  $i$ .

On a :  $P_i \cdot V = n_i \cdot RT$  (pour le gaz  $i$ )

$P \cdot V = n \cdot RT$ . (pour le mélange)

On en déduit : 
$$\frac{P_i}{P} = \frac{n_i}{n} \Rightarrow P_i = x_i P = v_i \cdot P.$$

\* **La fraction massique**

La fraction massique  $\mu_i$  du gaz  $i$  dans le mélange est le rapport entre  $m_i$

masse du gaz  $i$  et  $m$  masse totale du mélange. 
$$\mu_i = \frac{m_i}{m} \quad \text{Avec} \quad \sum_{i=1}^n m_i = m$$

$$\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$$

**3 : Caractéristiques d'un mélange de gaz parfaits :**

**3.a : Volume spécifique du mélange.**

$$V_{mel} = \frac{1}{\rho_{mel}} \quad \text{Avec} \quad \rho_{mel} = \frac{m}{V} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{V} = \sum_{i=1}^n \rho_i \cdot \frac{V_i}{V} = \sum_{i=1}^n \rho_i \cdot v_i$$

**3.b : La masse molaire apparente du mélange.**

$$M_{Mel} = \frac{m}{n} = \sum_{i=1}^n n_i \frac{M_i}{n} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot M_i = \sum_{i=1}^n v_i \cdot M_i = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{n}$$

### 3.c : Constante du gaz du mélange

$$r_{Mel} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{m} \cdot r_i = \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot r_i$$

**Remarque :** Pour le mélange des gaz, l'équation caractéristique se présente sous la forme suivante

$$P.V = m r_{Mel} . T$$

### III.B : Etude de quelques transformations particulières des gaz parfaits :

Etablir les formules pour des transformations particulièrement usuelles des gaz parfaits à partir des résultats vus dans le sous chapitre A.

Toutes les formules seront données pour une U.D.M de gaz à la température  $T$  et sous la pression  $P$ . ( $C_v$  et  $C_p$  seront exprimées en  $J/Kg^{\circ}K$ .)

Pour appliquer ces formules à une masse  $m$  de gaz parfait, il suffit de multiplier  $C_v$ ,  $C_p$ ,  $r$  par  $m$  et de remplacer  $v$  par  $V$ , le volume effectivement occupé par la masse  $m$ .

Si on travaille sur une mole de gaz parfait, il faut remplacer  $r$  par  $R$  ( $C_p$ ,  $C_v$ ,  $R$  exprimées en  $J/Mole^{\circ}k$ ).

#### III.B.1 : Transformation isotherme :

##### 1 : Equation caractéristique

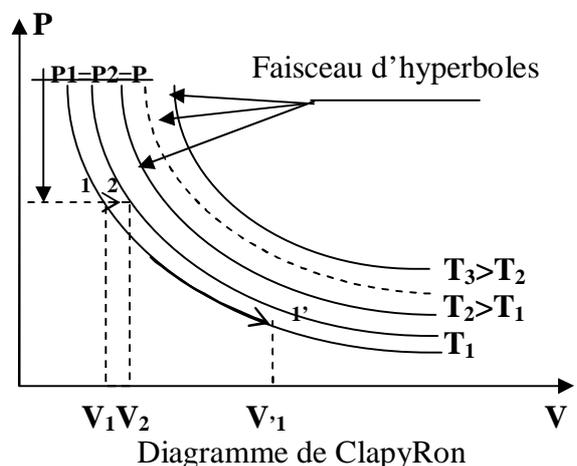
Pour l'unité U.D.M d'un gaz parfait, l'équation d'état s'écrit  $P.V=r.T$   
A température constante  $P.V=Cte$

$$\text{Où : } p = \frac{rT}{V} = \frac{Cte}{V}$$

Dans le diagramme de CLAPYRON ( $P$ ,  $V$ ), une isotherme est représentée par une hyperbole équilatère.

$$\text{Isotherme } T_1 \rightarrow P_1.V_1 = P'_1.V'_1$$

A pression constante  $P_1 = P_2 = P$ .



$$\left. \begin{array}{l} P.V_1 = r.T_1 \\ P.V_2 = r.T_2 \end{array} \right\}$$

$$P, r \text{ cte} \Rightarrow \text{Si } V_2 > V_1 \Rightarrow T_2 > T_1$$

On peut graduer le diagramme en température par un faisceau d'hyperboles équilatères. Les températures augmentent quand on s'éloigne de l'origine.

2 : Expression du travail de forces de pression :

$$W_{is} = -\int_1^2 P.dv \quad \text{Or } p.v = r.T \Rightarrow P = \frac{rT}{v} \quad rT = \text{Cte} \Rightarrow W_{is} = -rT \int_1^2 \frac{dv}{v} = -rT \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

ou encore en fonction des pressions : 
$$W_{is} = rT \cdot \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

$$W_{is} = rT \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = rT \cdot \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

III.B.2 : Transformation adiabatique réversible :

1 : Equation caractéristique

Nous avons vu dans le sous chapitre A, §4, que la quantité de chaleur peut s'exprimer par :

$$\delta Q = \frac{1}{r}(C_p \cdot pdv + C_v \cdot vdp)$$

Transformation adiabatique  $\Rightarrow \delta Q = 0$  c-a-d  $C_p \cdot p \cdot dv + C_v \cdot v \cdot dp = 0$ .

On divise les deux membres par  $C_v \cdot v \cdot P$  on obtient :

$$\frac{C_p \cdot pdv}{C_v \cdot v \cdot p} + \frac{C_v \cdot v \cdot dp}{C_v \cdot v \cdot p} = 0 \Rightarrow \frac{C_p}{C_v} \cdot \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = 0 \quad \text{ou} \quad \gamma \cdot \frac{dV}{v} + \frac{dp}{p} = 0,$$

si  $\gamma = \text{cte}$ , on intègre et on obtient :  $\gamma \cdot \ln(v) + \ln(p) = \text{cte}$  ou  $\ln(p \cdot v^\gamma) = \text{cte}$   
 $\Rightarrow p \cdot v^\gamma = \text{cte}$

**$P \cdot V^\gamma = \text{cte}$**  Loi de poisson (variable  $p, v$ ).

Pour une transformation de (1) à (2) on a :

$$P_1 \cdot V_1^\gamma = P_2 \cdot V_2^\gamma$$

**Remarque 1 :**

*La loi de Poisson peut s'exprimer en fonction de deux variables parmi les trois variables (P, V, T)*

**Variables (P, T).** 
$$\begin{cases} P \cdot V = rT \\ P \cdot V^\gamma = cte \Rightarrow (P \cdot V)^\gamma \cdot P^{1-\gamma} = cte \Rightarrow r^\gamma \cdot T^\gamma \cdot P^{1-\gamma} = cte. \end{cases}$$

Or  $r = cte \Rightarrow T^\gamma \cdot P^{1-\gamma} = cte$  ou : 
$$\boxed{T \cdot P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = cte}$$
 2<sup>ème</sup> loi de Poisson, variable (P, T).

Pour une transformation de (1) à (2) on peut écrire.

$$T_1 \cdot P_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_2 \cdot P_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \frac{T_2}{T_1} &= \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \\ \frac{P_2}{P_1} &= \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \end{aligned}}$$

**Variables (V, T)** 
$$\left. \begin{aligned} P \cdot V &= r \cdot T \\ P \cdot V^\gamma &= (P \cdot V) \cdot V^{\gamma-1} = cte \end{aligned} \right\} \Rightarrow r \cdot T \cdot V^{\gamma-1} = cte \quad r = cte$$

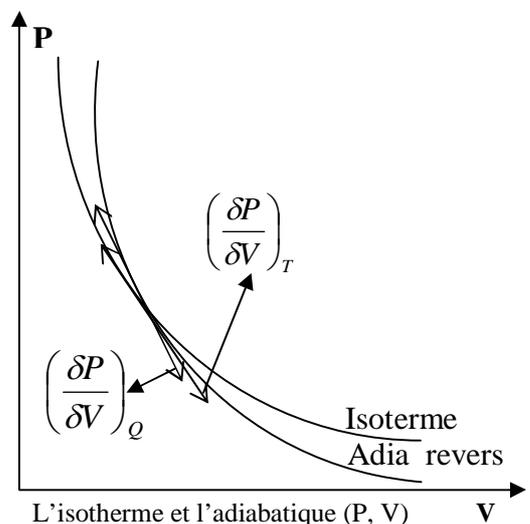
$\Rightarrow \boxed{T \cdot V^{\gamma-1} = cte}$  3<sup>ème</sup> loi de Poisson, variables (T, V).

Transformation de (1) à (2)  $\Rightarrow T_1 \cdot V_1^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_2^{\gamma-1} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \frac{T_2}{T_1} &= \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \\ \frac{V_2}{V_1} &= \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \end{aligned}}$

**Remarque 2 :**

*\* En toute rigueur, les formules de Poisson ne sont pas valables que pour  $\gamma = cte$ , c-a-d  $C_v$  et  $C_p$  sont constantes.*

*On pratique, même pour des variations de température de 200° à 300°  $C_p$  et  $C_v$  varient assez peu pour que l'on puisse considérer les formules de Poisson comme exactes et ceci avec une bonne précision.*



**\* Diagramme de CLAPYRON.**

Les adiabatiques réversibles sont représentées par des courbes d'équation :

$$P.V^\gamma = cte$$

Calculons au point M, les pentes de l'adiabatique et de l'isotherme qui y passe (Voir figure ci contre).

**Isotherme** :

$$\left. \begin{array}{l} P.V = rT \\ P = \frac{rT}{V} \end{array} \right\} \Rightarrow \left( \frac{dp}{dV} \right)_T = - \left( \frac{rT}{V^2} \right) = - \frac{1}{V} \cdot \frac{rT}{V} \Rightarrow \left( \frac{dp}{dV} \right)_T = - \frac{P}{V}$$

**Adiabatique** :

$$P.V^\gamma = cte \Rightarrow \frac{dp}{P} + \gamma \cdot \frac{dV}{V} = 0$$

$$\left( \frac{dp}{dV} \right)_Q = -\gamma \cdot \frac{P}{V} = +\gamma \cdot \left( \frac{dp}{dV} \right)_T \Rightarrow \left( \frac{dp}{dV} \right)_Q = \gamma \left( \frac{dp}{dV} \right)_T$$

Où  $\frac{\left( \frac{dp}{dV} \right)_Q}{\left( \frac{dp}{dV} \right)_T} = \gamma$  Formule de REECH

En générale  $\gamma > 1$ .

$\left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_Q$  : représente dans le diagramme (p, v) la pente au point M, de la courbe qui représente la transformation adiabatique.

$\left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T$  : représente dans le diagramme (p, v) la pente au point M, de la courbe qui représente la transformation isotherme.

Or, comme  $\gamma > 1$  cela veut dire que l'adiabatique passant par M a une pente supérieure à l'isotherme.

**2 : Travail de forces de pression :**

$$W = -\int P; dv \quad \text{Transformation adiabatique} \Rightarrow P.V^\gamma = cte \quad \text{où}$$

$$P_1.V_1^\gamma = P_2.V_2^\gamma = P.V^\gamma = cte \Rightarrow P = P_1 \cdot \frac{V_1^\gamma}{V^\gamma}$$

$$W_p = -\int_1^2 P_1.V_1^\gamma \cdot \frac{dv}{V^\gamma} = -P_1.V_1^\gamma \int_1^2 \frac{dv}{V^\gamma} = -P_1.V_1^\gamma \left[ -\frac{1}{(\gamma-1)V^{\gamma-1}} \right]^{V_2}$$

$$W_p = \frac{P_1 \cdot V_1^\gamma}{\gamma - 1} \left[ \frac{1}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_1^{\gamma-1}} \right] \quad \text{Or} \quad P_1 \cdot V_1^\gamma = P_2 \cdot V_2^\gamma \dots \quad * \text{ et / par } P_1 \cdot V_1^\gamma$$

$$\Rightarrow W_p = \frac{P_1 \cdot V_1^\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{1}{P_1 \cdot V_1^\gamma} \left[ \frac{P_2 \cdot V_2^\gamma}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{P_1 \cdot V_1^\gamma}{V_1^{\gamma-1}} \right] = \frac{1}{\gamma - 1} (P_2 \cdot V_2 - P_1 \cdot V_1)$$

D'où finalement :

$$W_p = \frac{P_2 \cdot V_2 - P_1 \cdot V_1}{\gamma - 1}$$

Or  $\left. \begin{array}{l} P_1 \cdot V_1 = rT_1 \\ P_2 \cdot V_2 = rT_2 \end{array} \right\} \Rightarrow W_p = \frac{r}{\gamma - 1} (T_2 - T_1) \quad \text{pour } m = 1 \text{ kg}$

**Remarque :**

$$P_1 \cdot V_1^\gamma = P_2 \cdot V_2^\gamma \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^\gamma, \quad \frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Rightarrow \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} = \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \quad \text{En}$$

utilisant ces deux relations, on trouve aussi :

$$W_p = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{\gamma - 1} = \frac{P_2 V_2}{\gamma - 1} \left[ 1 - \frac{P_1 V_1}{P_2 V_2} \right] = \frac{P_2 V_2}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^\gamma \cdot \frac{V_1}{V_2} \right]$$

$$W_p = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{\gamma - 1} = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} \left[ \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1} - 1 \right] = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma \cdot \frac{V_2}{V_1} - 1 \right]$$

$$W_p = \frac{P_2 V_2}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} \right]$$

$$W_p = \frac{P_2 V_2}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]$$

Ou

$$W_p = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right]$$

$$W_p = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$$

**3 : Energie interne – travail technique :**

\* **Energie interne.**

$W + Q = \Delta U$ , ici  $Q = 0$  (transformation adiabatique).  $\Rightarrow$

$$\Delta U = W$$

\* **Travail technique.**

$$W_T = \int V.dp \quad \text{Or on a } P.V^\gamma = cte \Rightarrow \frac{dp}{P} + \gamma \cdot \frac{dV}{V} = 0 \quad \text{Multiplions par } P.V$$

$$\Rightarrow P.V \cdot \frac{dp}{P} + \gamma \frac{dV \cdot P.V}{V} = 0 \Rightarrow V.dp + \gamma.P.dV = 0 \quad \text{où } \int_1^2 V.dp = -\gamma \int_1^2 P.dV \Rightarrow$$

$$W_T = \gamma \cdot W_p$$

**III.B.3 : Transformation polytropique:**

**1 : Définition**

Les transformations réelles ne sont en générale ni tout a fait isotherme ( $P.V = cte$ ) ni tout a fait adiabatiques réversibles  $P.V^\gamma = cte$ , mais se rapprochent des transformations d'équation  $P.V^k = cte$  appelées transformations polytropiques, avec en général  $1 < k < \gamma$ .

**2 : Travail de forces de pression – travail technique.**

A partir de la loi  $P.V^k = cte$ .

A partir de l'expression  $\delta W_p = -P.dv$ .

A partir de l'expression  $\delta W_T = V.dp$ , on peut faire un raisonnement identique à celui de **ζII** (transformations adiabatiques réversibles) mais en remplaçant  $\gamma$  par  $k$ .

En particulier :

$$W_p = \frac{P_2 \cdot V_2 - P_1 \cdot V_1}{k - 1}$$

$$W_T = k \cdot W_p = \frac{k}{k - 1} (P_2 \cdot V_2 - P_1 \cdot V_1)$$

**3 : Chaleur massique d'une transformation polytropique.**

**a : Définition.**

Soit une transformation quelconque  $C$ , passant par un point  $M (P, V, T)$ . La chaleur massique du système étudié au cours de la transformation  $C$  et calculée au point  $M$  est :

$$C_{c(M)} = \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_M \quad C_{c(M)} : \text{Chaleur massique.}$$

Pour une transformation donnée  $C_{c(M)}$  dépend du point  $M$  mais aussi de la transformation  $C$  considérée. En particulier pour les transformations isobares (respectivement isochores), on retrouve la chaleur massique  $C_p$  respectivement  $C_v$ .

On effet, on a vu pour un gaz parfait,  $\delta Q = C_v.dT + P.dv$ .

Transformation isochore  $\Rightarrow dv = 0 \Rightarrow \delta Q = C_v.dT$

$$\text{Ou : } \boxed{C_v = \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_v} \quad \text{chaleur massique à volume constant.}$$

De même pour un gaz parfait,  $\delta Q = C_p.dT - V.dp$ .

Transformation isobare  $\Rightarrow dp = 0 \Rightarrow \delta Q = C_p.dT$

$$\text{Ou } \boxed{C_p = \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_p} \quad \text{chaleur massique à pression constante.}$$

### **b : Application à une transformation polytropique:**

1<sup>er</sup> principe  $\delta W_p + \delta Q = dU$  or  $dU = C_v.dT$

$$\delta W_p = d \frac{(P.V)}{k-1} \quad \text{Sous forme différentielle de : } W_p = \frac{P_2.V_2 - P_1.V_1}{k-1}$$

$$\delta W_p = d \frac{(P.V)}{k-1} = d \frac{(rT)}{k-1} = r \frac{dT}{k-1} = \frac{r}{k-1} dT = \frac{r}{\gamma-1} \cdot \frac{\gamma-1}{k-1} dT \Rightarrow \delta W_p = C_v \cdot \frac{\gamma-1}{k-1} dT$$

$$\delta Q = dU - \delta W_p = C_v.dT - C_v \cdot \frac{\gamma-1}{k-1} dT = C_v \left( 1 - \frac{\gamma-1}{k-1} \right) dT$$

$$\delta Q = C_v \left( \frac{k-1-\gamma+1}{k-1} \right) dT = C_v \left( \frac{k-\gamma}{k-1} \right) dT \quad \text{D'où :}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \delta Q &= C_k . dT \\ C_k &= C_v \cdot \frac{k-\gamma}{k-1} \end{aligned}}$$

**Remarque :**

\* Si  $k = \gamma$  on a  $C_k = 0 \Rightarrow \delta Q = 0$

On retrouve bien l'adiabatique  $\begin{cases} \delta Q = 0 \\ P.V^\gamma = Cte \end{cases}$

\* Si  $k = 1$   $C_k \rightarrow \infty$  (Physiquement impossible).

Il faut que  $dT = 0$  pour que  $\delta Q$  soit finie.

$dT = 0$ , on retrouve bien l'isotherme.  $\begin{cases} T = cte \\ P.V = cte \end{cases}$

**Fin du chapitre**

---